תת מרחבים של $\mathbb{R}^n$, בסיסים ומימד.

יש לפתור את כל השאלות (כולל אלו שתיפתרנה בתירגול)

שאלה 1

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 1 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. מצאו את $\operatorname{rank}(A)$. מצאו את המימד ותנו דוגמה לבסיס של תתי המרחבים הבאים $V \subset \mathbb{R}^n$
(התשובות תהיינה תלויות בפרמטרים)

1. V הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^6$ הנפרש ע"י העמודות של A.
2. V הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^5$ הנפרש ע"י השורות של A.
3. $V = \{x \in \mathbb{R}^5 : Ax = 0\}$
4. $V = \{x \in \mathbb{R}^6 : A^t x = 0\}$

שאלה 2

יהיו $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \mathbb{R}^{10}$. אילו מהטענות הבאות נכונות?

1. אם $\dim \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = 4$ אז בהכרח $v_5 \in \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
2. אם $\dim \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = 4$ אז בהכרח $v_4 \in \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$
3. אם $\dim \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = 4$ אז בהכרח אחד מהוקטורים $v_1, ..., v_5$ הוא צירוף ליניארי של ארבעת הוקטורים האחרים
4. אם $\dim \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = 3$ והוקטורים v_1, v_2, v_3 בלתי תלויים ליניארית אז בהכרח הוקטורים v_4, v_5 תלויים ליניארית
5. אם $\dim \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = 3$ אז בהכרח הוקטורים v_2, v_3, v_4, v_5 תלויים ליניארית
6. אם $\{v_3, v_4\}$ הוא בסיס למרחב הוקטורי $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ אז הוקטורים v_1, v_2, v_3 תלויים ליניארית

שאלה 3

תהי A מטריצה 4×10, יהי $V \subset \mathbb{R}^{10}$ תת המרחב של $\mathbb{R}^{10}$ הניתן ע"י המערכת ההומוגנית הבאה של משוואות ליניאריות

$$V = \{x \in \mathbb{R}^{10} : Ax = 0\}$$

אילו מהטענות הבאות נכונות?

1. אם $\operatorname{rank}(A) = 4$ אז כל 7 וקטורים כלשהם ב-V בהכרח תלויים ליניארית
2. אם V מכיל 7 וקטורים בלתי תלויים ליניארית אז בהכרח $\operatorname{rank}(A) < 4$
3. V אינו נפרש בידי אף 5 וקטורים ב-$\mathbb{R}^{10}$
4. אם V נפרש ע"י 6 וקטורים ב-$\mathbb{R}^{10}$ אז בהכרח $\dim(V) = 6$
5. אם V נפרש ע"י 7 וקטורים ב-$\mathbb{R}^{10}$ אז בהכרח $\dim(V) = 7$
6. אם V נפרש ע"י 8 וקטורים בלתי תלויים ליניארית ב-$\mathbb{R}^{10}$ אז בהכרח $\operatorname{rank}(A) = 2$